Adı Soyadı: **19.01.2024**

Numara: = CEVAP ANAHTARI =

MAT 211 ANALİZ III DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\,dx$ integralinin çeşidini ve karakterini belirleyiniz (10 puan).

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{n}$ serisinin karakterini belirleyiniz (10 puan).

3) $(0,1)$ aralığında tanımlı düzgün yakınsak bir fonksiyon dizisi sınırlıdır ifadesi doğru ise ispat ediniz, yanlış ise bir ters örnek veriniz (15 puan).

4) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ fonksiyon serisinin düzgün yakınsak olup olmadığını araştırınız (15 puan).

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\ldots\left(n-\frac{2}{3}\right)}$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını ve yakısaklık yarıçapını bulunuz (15 puan).

6) $\mathbb{R}^3$ de verilen $x_n = \left(\frac{(-1)^n}{n},\ \cos\frac{1}{n},\ n-\sqrt{n^2+n}\right)$ genel terimli (x_n) dizisi karakterini belirleyiniz. Dizi yakınsak ise limitini bulunuz (15 puan).

7) Aşağıda boş bırakılan yerleri doldurunuz (20 puan).

a) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin içi

(boş küme) (reel sayılar)

$\mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset$......... kümesi ve yığılma noktaları kümesi $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$........ kümesidir (8 puan).

b) $\mathbb{R}^n$ de tek nokta kümeleri ...kapalı....... kümelerdir (4 puan).

c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2\} \cup \{(3,3)\}$ kümesinin kapanışı

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\} \cup \{(3,3)\}$.................. kümesidir (4 puan).

d) $\mathbb{R}^n$ de kapalı ve sınır bir küme ....kompakt......... kümedir (4 puan).

Not: Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

(1) $x_0 = 0$ da $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$ fonksiyonu tanımsızdır. Ayrıca

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} \to \frac{0}{0}$$ olup L'Hospital yapılırsa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

bulunur. O halde $\int_0^1 \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\,dx$ integrali ikinci tip has olmayan integraldir.

Şimdi $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunu alalım. $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \dfrac{1}{x^{1/2}}\,dx$

ikinci tip has olmayan integrali $p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan p-testi gereği yakınsaktır.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \to \frac{0}{0}$$ (L'Hospital yapılırsa)

olup

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sqrt{x}} = 1 > 0$$

bulunur. Limit karşılaştırma testi gereği $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}\,dx$

has olmayan integrali yakınsaktır.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$ serisinde $(\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, \dots) = (-1)^n$

biçiminde olup $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$ serisi ıraksaktır.

(3) İfade yanlıştır. Ters örnek verelim. $\forall x \in (0,1)$ için $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n}$

biçiminde bir (f_n) fonksiyon dizisini alalım. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{x}$

olup $f_n(x) \to f(x) = \dfrac{1}{x}$ noktasal yakınsaması vardır.

Scanned with CamScanner

3. cevabın devamı) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x\in(0,1)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{x}+\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{n} = a_n$$

olup $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $f_n \rightrightarrows f$ düzgün yakınsaması vardır

Ancak $\forall x \in (0,1)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{x}+\frac{1}{n}\right| \le M$ olacak şekilde

bir $M>0$ sayısı bulunamaz. (f_n) sınırlı değildir

(4) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ fonksiyon serisini alalım.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ için $\left|\frac{\cos(nx)}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n} = M_n$ olup

$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ geometrik serisi $r=\frac{1}{2}<1$ olduğundan yakınsaktır.

O halde Weierstrass M testi gereği $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ düzgün yakınsaktır

(5) Bu kuvvet serisi $x_0=0$ merkezli bir kuvvet serisidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{1}{(1-\frac{2}{3})(2-\frac{2}{3})\cdots(n-\frac{2}{3})} = \frac{1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdots\frac{(3n-2)}{3}} = \frac{3^n}{1.4.7\ldots(3n-2)}$$

olur. R yakınsaklık yarıçapı olmak üzere

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{1.4.7\ldots(3n-2)}} \cdot \frac{\cancel{1.4.7\ldots(3n-2)}\,(3n+1)}{\cancel{3^n}.3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{3} = +\infty$$

bulunur. O halde bu kuvvet serisi $(-\infty,+\infty)$ aralığında yani $\mathbb{R}$ de

yakınsaktır.

⑥ $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, $(b_n) = \left(\cos\frac{1}{n}\right)$ ve $(c_n) = \left(n - \sqrt{n^2+n}\right)$

diziler $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$ dizisinin bileşen dizileridir. Önce (a_n) dizisini aldım. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ olup $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi gereği $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ olur.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = 1$$

olur. Son olarak

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n - \sqrt{n^2+n}\right)}{\frac{1}{\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}} \to \infty - \infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n^2 - n}{n + \sqrt{n^2+n}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left[1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right]}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{n}}^{\to 0}}} = -\frac{1}{2}$$

bulunur. Bileşen diziler yakınsak olduğundan $(x_n) \subset \mathbb{R}^3$ yakınsaktır.

Ayrıca (x_n) dizisinin limiti

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n}, \cos\frac{1}{n}, n - \sqrt{n^2+n}\right) = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.